Studijní text

Co je singulární výrok

SINGULÁRNÍ VÝROKY:

☺**PETR** ☺ ☹
☺ ☹ ☺

„Petr je veselý.“

Jednoduchý singulární výrok – vznikne spojením singulárního termínu s termínem obecným pomocí spony=slova „je“.

<u>Příklad:</u>
Pavel je člověk. (tj. Pavel patří do množiny lidí)
Praha je město. (tj. Praha patří do množiny měst)

Jednoduchý singulární výrok je způsob jednoduché predikce, jejímž smyslem je vypovídat něco (člověk, město, ..) o něčem (Pavel, Praha, ..)
(vztah: predikát, subjekt)

Na jednoduché singulární výroky lze aplikovat pravidla výrokové logiky, tj. spojovat je do složených výroků pomocí logických spojek.

Obecný termín *člověk* lze spojovat pouze s jedním singulárním termínem (jednou proměnnou)

Petr je člověk.

<u>Jedná se proto o jednomístný predikát.</u>

<u>Příklady:</u>
Petr je člověk.
Petr je bohatý.
Petr je doma.
Petr se učí. (Petr je učícím se.)
Petr má radost. (Petr je radujícím se.)

Všimněte si, že výroky obsahující jednomístné predikáty v podstatě vyjadřují vztah „patřit do množiny/být elementem“.

Existují i obecné termíny, které se vztahují k uspořádaným dvojicím. Nevyjadřují jejich vlastnosti, ale jejich vzájemný vztah. („větší než“, bratr, …)

Petr je větší než Pavel. (singulární termín) (obecný termín) (singulární termín)
Ivan je bratrem Ondry.

Takové obecné termíny se nazývají **vztahové neboli relační termíny**.

Existují i relační termíny, které vyjadřují vztah mezi více než dvěma předměty. Pro vytvoření příslušného jednoduchého výroku potřebujeme příslušný počet singulárních termínů.

Jedná se proto o n-místný predikát.
Vyjádření vztahu, že Praha *leží mezi* Mělníkem a Benešovem potřebujeme minimálně tři singulární termíny Praha, Mělník, Benešov.

PŘIPOMEŇTE SI, co víte o konkretizaci v jazyce. (otázky kdo konkrétně, co konkrétně, …) Srovnejte s úlohou singulárních výroků.

Forma v predikátové logice

I v predikátové logice nám nepůjde o jednotlivé konkrétní výroky, nezaměříme se na obsah, ale na strukturu mající vliv na pravdivostní hodnotu, tj. na formu (zápis struktury výroku).

Zavedeme:

individuové konstanty = symboly pro singulární termíny: malá písmena z první poloviny abecedy (a,b,c,d,….)

n-místné predikátové konstanty=symboly pro obecné termíny: velká písmena (F, G, H, ..)

Jednoduchá věta vznikne spojením individuové a predikátové konstanty.

Tato věta má formu: **a je F**. (přehledněji zapisujeme jako funkci **F(a)**)

a …Petr, F … být člověkem
a je F (F(a)) ….. *Petr je člověk.*

Věty (např. *Petr je větší než Pavel, Praha leží mezi Mělníkem a Benešovem*), v nichž se vyskytují vícemístné predikáty zapisujeme G(a,b), H(a,b,c).

Takto vzniklé formule můžeme spojovat pomocí symbolů zavedených v rámci výrokové logiky. ($\neg$ F(a), F(a) $\wedge$ G(c))
(např. *Není pravda, že Petr je člověk*, *Petr je člověk a Bobík je pes*.)

Zjištění pravdivostní hodnoty formule:

Pravdivostní hodnotu takto vytvořené formule zjistíme na základě principů z výrokové logiky. Např. F(a) $\wedge$ G(c) je jako konjunkce pravdivá, jsou-li pravdivé oba její členy.

Ve výrokové logice – pravdivost členů byla něčím základním, neodvozeným.

V predikátové logice – členy vytvářejí strukturu vytvořenou pomocí predikátové konstanty (F) a konstanty individuové (a). Pravdivost zde závisí na tom, zda spojíme vhodnou predikátovou konstantu s vhodnou individuovou konstantou.

Co je vhodné spojení ?
Výrok formy F(a) je pravdivý, právě tehdy, když je předmět, který označuje individuová konstanta prvkem množiny, kterou označuje konstanta predikátová.

Výrok *Zinek je chemický prvek* je pravdivý, pokud zinek patří do množiny chemických prvků. A je nepravdivý, pokud zinek nepatří do množiny chemických prvků.

POZNÁMKA: Pravdivostní hodnotu výroku F(a) můžeme vysvětlit i pomocí přístupu Fregeho, přes predikátové funkce.

Např. „Je chemický prvek“ vnímáme jako funkci, která pokud jí aplikujeme na zinek, je pravdivá. (*Zinek je chemický prvek* je pravdivý výrok) Pokud jí aplikujeme např. na vodu je nepravdivá. (*Voda je chemický prvek* je nepravdivý výrok)

Přístupy
- pomocí funkce přiřazující pravdu, nepravdu
- pomocí množiny a vlastnosti patřit do ní, nepatřit do ní

jsou dvě pojetí vyjadřující jinými slovy totéž.

Predikátová funkce přiřazuje hodnotu pravda jen těm individuím, která patří do příslušné množiny. (jsou jejím prvkem, elementem)

Logické spojky: funkce z pravdivostních hodnot do pravdivostních hodnot.

Predikátové konstanty: funkce z individuí do pravdivostních hodnot.

Formule $F(a) \wedge G(c)$ obsahuje tři funkce.
F – predikátová funkce
G – predikátová funkce
Konjunkce – výroková funkce

Dosadíme do predikátových funkcí příslušná individua (a,c) a dostaneme pravdivostní hodnoty. Ty dosadíme do konjunkce. A zjistíme příslušnou pravdivostní hodnotu.

Příklad:
F ... rostlina
G ... zvíře
a ... pampeliška
c ... kámen

Výrok: *Pampeliška je rostlina a kámen je zvíře.*

Predikátové funkce:
F(a) = 1 (pravda) ....pampeliška patří do množiny rostlin
G(c) = 0 (nepravda) ....kámen nepatří do množiny zvířat

$F(a) \wedge G(c) = 0$ (nepravda) .... výroková funkce - konjunkce

Příklad:
Výrok: *Jestliže Petr je člověk, pak Petr má dvě ruce.*

F … člověk
G … dvě ruce
a … Petr

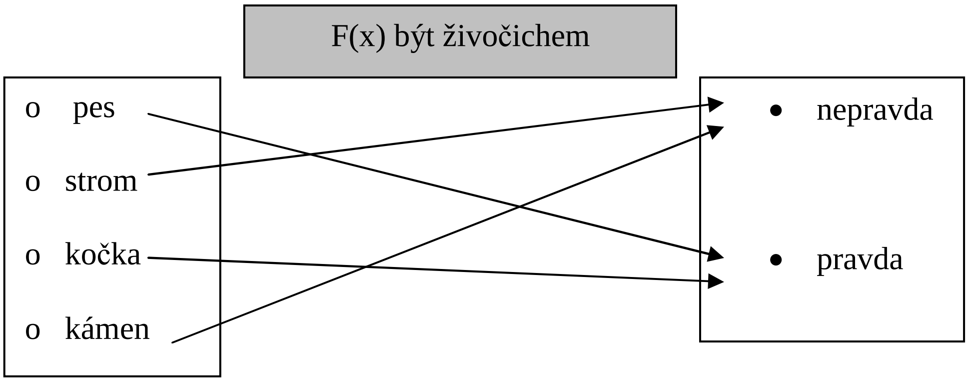
Predikátové funkce:
F(a) = 1 (pravda) …………. Petr je můj bratr, patří do množiny lidí
G(a) = 1 (pravda) …………Petr patří do množiny těch, co mají dvě ruce

$F(a) \Rightarrow G(a) = 1$ (pravda) …………. výroková funkce - implikace

Takto jsme schopni analyzovat pouze singulární výroky.

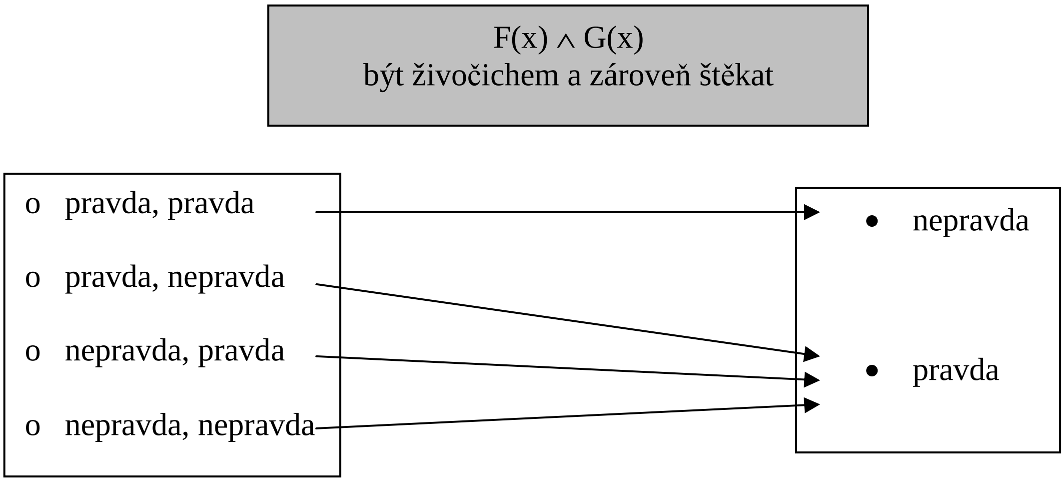
Predikátová funkce (z množiny individuí do množiny pravdivostních hodnot)

Vstup: individuum, individua
Výstup: pravdivostní hodnota



Výroková funkce (z množiny pravdivostních hodnot do množiny pravdivostních hodnot)

Vstup: pravdivostní hodnota, hodnoty
Výstup: pravdivostní hodnota



OBECNÉ VÝROKY:

☺ ☺ ☺ ☺
☺ ☺ ☺

„Každý se usmívá.“

V přirozeném jazyce nacházíme výroky, které mají obecný charakter. Vztahují se ke kvantitě, se kterou pracoval již Aristoteles. Začínají výrazy každý, všichni, nikdo ...

Například: *Každý je smrtelný, všichni psi jsou jezevčíci, žádný člověk není zvíře, ...*

Analyzujme výrok *Každý je smrtelný* z pohledu predikátové logiky.

F ... být smrtelný (predikátová konstanta)

Individuová konstanta – není zřejmá, je jen nedefinovaný výraz *každý*

Jak tento výraz používáme, co jím vyjadřujeme?

Zkoumáme-li nějakou množinu individuí např. množinu lidí, je výrok *Každý je smrtelný* pravdivý právě tehdy, když je smrtelný každý prvek této množiny.

Petr je smrtelný.
Ivan je smrtelný.
Jana je smrtelná.
...
atd. pro všechny prvky např. množiny lidí, kterou jsme se rozhodli zkoumat.

Zavedeme:
Individuová proměnná – označuje také jedno individuum jako individuová konstanta, není však řečeno o které individuum jde, označujeme pomocí malých písmen z druhé poloviny abecedy (x,y,z, ..)

Slouží pro zápisy výroků obecného charakteru.

Výrok: *Pro každé x platí: x je smrtelné.*

F(x) ...x je smrtelné

Pro každé x platí: F(x)

$\forall$ ….. znak pro výraz pro každé. (**obecný kvantifikátor**)

$\forall$ x F(x)   je logická forma výroku *Každý je smrtelný.*

PŘIPOMEŇTE SI, co víte o zobecňování/generalizaci v jazyce. Srovnejte s úlohou obecných výroků.

Příklad:
Každý člověk je smrtelný.

Výrok se dvěma obecnými termíny, G ...člověk, F ...smrtelný.

Jestliže funkce být člověk nabývá pravdivostní hodnoty pravda, pak této hodnoty nabývá i funkce být smrtelný.

Pro každé x platí: Jestliže x je člověk, pak x je smrtelný.

Pro každé x platí: G(x) $\Rightarrow$ F(x)

Logická forma: $\forall$x (G(x) $\Rightarrow$ F(x))

Pamatujme si, že určení pravdivostní hodnoty obecného výroku je spojené s logickou spojkou implikace (jestliže - pak). Musíme ověřit, zda každý prvek zkoumané množiny, který má vlastnost subjektu má pak vlastnost predikátu. Stačí najít jednu výjimku, pro kterou implikace neplatí, tj. má vlastnost subjektu a nemá vlastnost predikátu a obecný výrok je nepravdivý. Pro dokázání pravdy musíme prověřit všechny prvky zkoumané množiny.

EXISTENČNÍ/ČÁSTEČNÉ VÝROKY

☺ ☹ ☺ ☹
☹ ☹ ☹

„Někdo se usmívá."

Výroky, které začínají např. výrazem *některý, někdo, existuje* ...

Například*: Někteří psi jsou jezevčíci.*

Dvě predikátové konstanty G ...pes F .... jezevčík

Hledáme opět individua, která mají vlastnost, že současně x je pes a x je jezevčík.

K tomu, aby byl výrok pravdivý, stačí, aby existovalo alespoň jedno takové individuum, které je současně psem a současně jezevčíkem.

Existuje alespoň jedno x, pro které platí: x je pes a x je jezevčík.

Existuje alespoň jedno x, pro které platí: $G(x) \wedge F(x)$.

$\exists$ ….. znak pro výraz existuje alespoň jedno (**existenční kvantifikátor**)

Logická forma: $\mathbf{\exists\, x\, (G(x) \wedge F(x))}$

PŘIPOMEŇTE SI, co víte o neurčitosti v jazyce. Srovnejte s úlohou částečných výroků.

Pamatujme si, že určení pravdivostní hodnoty částečného výroku je spojené s logickou spojkou konjunkce (a zároveň). Musíme ověřit, zda existuje prvek zkoumané množiny, který má vlastnost subjektu a současně vlastnost predikátu. Stačí zkoumat prvky mající vlastnost subjektu a ověřovat konjunkci. Nalezneme-li jeden takový prvek, je částečný výrok pravdivý. Pro dokázání nepravdy musíme prověřit všechny prvky zkoumané množiny mající vlastnost subjektu.

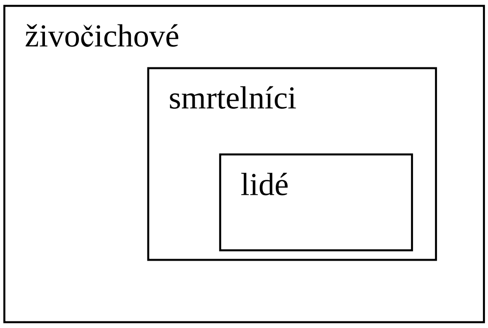
Jestliže používáme kvantifikátory, pak musíme vzít do úvahy všechna individua předem stanoveného **oboru úvahy (universum diskursu**).

Kritéria oboru úvahy:

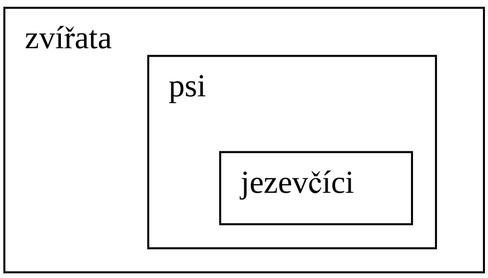
1. Musí obsahovat předměty, které jsou označeny individuovými konstantami
2. Musí obsahovat předměty, které jsou označeny predikátovými konstantami
3. Obor úvahy nesmí být prázdný.

Příklad:

Každý člověk je smrtelný. (obor úvahy: množina živočichů – obsahuje lidi a obsahuje smrtelníky, není prázdná)



Někteří psi jsou jezevčíci. (obor úvahy: zvířata)



Využíváme vztahů pojmů rod – druh, logických tříd.

Jednoduché vztahy v predikátové logice

Zjišťování správnosti argumentu v predikátové logice je o třídu obtížnější než v logice výrokové a proto není zařazeno do úvodu do studia logiky.

Uvedeme jen některé relativně jednoduché vztahy z predikátové logiky.

Vztah mezi obecnými a singulárními výroky:

Příklad:
Obor úvahy = tříprvková množina (a,b,c)
Individua: a,b,c

Vlastnost F (predikátová konstanta)

Výrok: $\forall x \; F(x)$
$\boldsymbol{\forall x \; F(x) \equiv (F(a) \wedge F(b) \wedge F(c))}$

obecný kvantifikátor vyjádřený pomocí konjunkce
(muž, žena, dítě)
Každý je omylný = Muž je omylný a zároveň žena je omylná a zároveň dítě je omylné.

Výrok: $\exists x \; F(x)$
$\boldsymbol{\exists x \; F(x) \equiv (F(a) \vee F(b) \vee F(c))}$

existenční kvantifikátor vyjádřený pomocí disjunkce
(muž, žena, dítě)
Někdo je nemocný = Muž je nemocný nebo žena je nemocná nebo dítě je nemocné.

Pravidla predikátové logiky:

Pravidlo odstranění obecného kvantifikátoru:
Máme-li formuli ve tvaru : $\forall x \; F(x)$, můžeme přejít k formuli $F(a)$ (ve smyslu pravdivosti)
(platí tehdy, když „a“ označuje určitý předmět)
Jestliže každý člověk je živočich, potom Petr je živočich. (Petr je z množiny lidí)

Pravidlo zavedení existenčního kvantifikátoru:
Máme-li formuli ve tvaru $F(a)$, můžeme přejít k formuli $\exists x \; F(x)$
(platí tehdy, když „a“ označuje určitý předmět)
Jestliže Petr je živočich, potom některý člověk je živočich. (Petr je člověk)

Pravidlo vztahu mezi existenčním a obecným kvantifikátorem
Máme-li formuli ve tvaru : $\forall x \; F(x)$, můžeme přejít k formuli $\exists x \; F(x)$
(platí tehdy, když obor úvahy není prázdný)
Jestliže každý člověk je živočich, potom některý člověk je živočich.

Vztah mezi konjunkcí a disjunkcí (de Morganův zákon)

$$(F(a) \wedge F(b) \wedge F(c) \equiv \neg(\neg F(a) \vee \neg F(b) \vee \neg F(c))$$

Muž je omylný a zároveň žena je omylná a zároveň dítě je omylné ≡ Není pravda, že muž není omylný nebo žena není omylná nebo dítě není omylné.

Vztahy mezi obecným a existenčním kvantifikátorem

$\forall x \ F(x) \equiv \neg (\exists x \ \neg F(x))$

Každý člověk je živočich ≡ Není pravda, že některý člověk není živočich.

$\neg \forall x \ F(x) \equiv \exists x \ \neg F(x)$

Není pravda, že každý člověk je živočich ≡ Některý člověk není živočich.

$\forall x \ \neg F(x) \equiv \neg (\exists x \ F(x))$

Žádný člověk není živočich ≡ Není pravda, že některý člověk je živočich.

$\neg (\forall x \ \neg F(x)) \equiv \exists x \ F(x)$

Není pravda, že žádný člověk není živočich ≡ Některý člověk je živočich.

formule s existenčním kvantifikátorem .... spojována s disjunkcí

formule s obecným kvantifikátorem ..... spojována s konjunkcí

Aplikace teorie do praxe

Příklad: Je zadáno

<u>Predikátové funkce:</u>
Být zaměstnanec ….. $F(x)$
Dostávat mzdu ….. $G(x)$
Mít nárok na dovolenou …… $H(x)$

<u>Individuové konstanty:</u>
a ….. Petr Novotný
b ….. Jana Nováková

Zapište výroky zastoupené následujícími formulemi:

1) $\forall x \ (F(x) \Rightarrow G(x))$
2) $\exists x \ (F(x) \wedge \neg H(x))$
3) $F(a) \wedge (\neg F(b))$

Řešení:
1) Každý zaměstnanec dostává mzdu.
2) Některý zaměstnanec nemá nárok na dovolenou.
3) Petr Novotný je zaměstnanec a Jana Nováková není zaměstnanec.

Zapište formulemi následující výroky
1) Není pravda, že žádný zaměstnanec nedostává mzdu.
2) Existuje zaměstnanec, který má nárok na dovolenou.
3) Každý dostává mzdu.
4) Někdo nemá nárok na dovolenou.

Řešení:
1) $\neg (\forall x \ (F(x) \Rightarrow \neg G(x)))$
2) $\exists x \ (F(x) \wedge H(x))$
3) $\forall x \ G(x)$
4) $\exists x \ \neg H(x)$

Kontrolní otázky a cvičení

- Co je to singulární výrok.
- Jaký rozdíl je mezi jednomístným predikátem a vícemístným predikátem.
- Co je to obecný výrok. Co je to částečný výrok. Uveďte příklady.

- Vysvětlete funkci a vlastnosti všeobecného kvantifikátoru.
- Vysvětlete funkci a vlastnosti existenčního kvantifikátoru.
- Co je to obor úvahy (universum diskursu)