

Studijní text

Výroková logika a přirozený jazyk

Abychom mohli využívat poznatky výrokové logiky, potřebujeme umět převádět věty přirozeného jazyka (v našem případě češtiny) do formulí a pracovat s logickou formou.

Představte si tuto znalost jako takový překladač.

česká věta \longrightarrow formule
formule \longrightarrow česká věta

Máme např. analyzovat z pohledu pravdivostních hodnot následující složený výrok. (neboli hledáme odpověď na otázku, kdy má vedoucí Petr pravdu a kdy ne?)

Sdělení vedoucího Petra: „*Ocenil jsem výkon pracovníka odměnou a přeřadil jsem pracovníka na vyšší pozici.*“

Výrok obsahuje dva jednoduché výroky p, q:

p: *Vedoucí Petr ocenil výkon pracovníka odměnou.*

q: *Vedoucí Petr přeřadil pracovníka na vyšší pozici.*

Složený výrok lze vyjádřit logickou formulí: $p \wedge q$ (použitá logická forma)

Na úrovni formulí se nám budou lépe uplatňovat pravidla logiky. Např. zjišťovat pravdivostní hodnoty složených výroků.

proměnná	proměnná	hodnota funkce
p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ve vztahu k původnímu obsahu sdělení potřebujeme umět interpretovat tyto informace opět pomocí přirozeného jazyka.

Složený výrok je pravdivý, právě tehdy, když nastaly obě skutečnosti, tj. došlo i k udělení odměny i k přeřazení pracovníka na vyšší pozici. Jestliže např. k udělení odměny nedošlo a pracovník byl pouze přeřazen na vyšší pozici, sdělení vedoucího je výrokem nepravdivým. A pokud byla pracovníkovi udělena odměna a nebyl přeřazen na vyšší pozici, je také sdělení vedoucího nepravdivé.

Příklad:

Nyní budeme pracovat s následujícími jednoduchými výroky p, q, r:

p: *Student je mladý člověk.*

q: *Student je odvážný člověk.*

r: *Petr je student.*

Máme daný složený výrok: *Jestliže student je odvážný člověk, pak není mladý člověk.*
 Vyjádřeme tento výrok formulí: $q \Rightarrow (\neg p)$

Máme daný složený výrok: *Petr je student právě tehdy, když student je mladý a zároveň odvážný člověk.*
 Vyjádřeme tento výrok formulí: $r \Leftrightarrow (p \wedge q)$

Máme dānu formuli: $p \vee (\neg q)$
 Vyjādřeme složený výrok, který by této formuli odpovídal: *Student je mladý člověk nebo není odvážný člověk.*

Rozbory pravdivostních hodnot

Máme-li složený výrok vyjádřený formulí (známe logickou formu), můžeme na základě znalosti pravdivostních hodnot jednoduchých výroků (ze kterých se složený výrok skládá) a znalosti logické formy určit, jakou pravdivostní hodnotu bude složený výrok mít (umíme ho ohodnotit).

složený výrok $((p \wedge q) \wedge p) \Rightarrow q$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge p$	$((p \wedge q) \wedge p) \Rightarrow q$	Tento výrok je vždy pravdivý
1	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	
0	1	0	0	1	
0	0	0	0	1	

složený výrok $(p \wedge q) \Rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	Nepravdivý je tento výrok, když nastane v realitě situace, že výroky p,q jsou pravdivé a výrok r pravdivý není. Ve všech ostatních případech je tento výrok pravdivý.
1	1	1	1	1	
1	1	0	1	0	
1	0	1	0	1	
1	0	0	0	1	
0	1	1	0	1	
0	1	0	0	1	
0	0	1	0	1	
0	0	0	0	1	

Rozhodování o vzájemné zaměnitelnosti logických forem (bez znalosti obsahu)

Známe formule, vyjadřující složené výroky osob A,B.

Výrok osoby A: $\neg ((\neg p) \wedge q)$

Výrok osoby B: $\neg (p \vee (\neg q))$

Máme rozhodnout, zda jsou výroky těchto osob **vzájemně zaměnitelné**. Tj. potřebujeme analyzovat, zda nabývají stejných pravdivostních hodnot (princip extenzionality). (Říkají osoby A a B totéž z pohledu pravdivostních hodnot ?)

Vytvoříme si tabulku pravdivostních hodnot pro složený výrok osoby A:

Sloupec A	Sloupec B	Sloupec C	Sloupec D	Sloupec E
vstupy				výstup
jednoduché výroky		Negace (sloupec A)	Konjunkce (sloupce C,B)	Negace (sloupec D)
p	q	$\neg p$	$(\neg p) \wedge q$	$\neg ((\neg p) \wedge q)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

Vytvoříme si tabulku pravdivostních hodnot pro složený výrok osoby B:

p	q	$\neg q$	$p \vee (\neg q)$	$\neg (p \vee (\neg q))$
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0

Porovnáme pravdivostní hodnoty složených výroků (sloupce výstupů). Pokud jsou sloupce identické (shodné v odpovídajících řádcích vstupů), jsou výroky vzájemně zaměnitelné. V našem případě výroky vzájemně zaměnitelné nejsou, dokonce si můžeme všimnout, že nabývají přesně opačných pravdivostních hodnot. Tzn. že jeden výrok je negací druhého výroku. Osoba A má pravdu, právě tehdy, když jí osoba B nemá. A naopak.

Někdy vytvořit tabulku pravdivostních hodnot pro složený výrok může být i pracnější, než je tomu ve výše uvedeném příkladu. Vyžaduje to trochu trpělivosti, zaměření se na detail a postupování krok za krokem v daném systému.

Příklad:

Rozhodněte o vzájemné zaměnitelnosti výroků

V1: $(\neg p) \wedge q$

V2: $(q \Rightarrow ((\neg q) \vee p))$

PŘIPOMEŇTE SI, že výroky jsou vzájemně zaměnitelné právě tehdy, když jejich ekvivalence je tautologický výrok.

Vezměme složený výrok, vyjádřený následující formulí:

$$((\neg p) \wedge q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow ((\neg q) \vee p))$$

S určením (výpočtem) pravdivostní hodnoty složeného výroku je to jako se stavbou domu. Začít musíme od základů, a postupovat a skládat směrem nahoru, ke střeše. (Poznámka: Pro přehlednost při zápisech formulí používáme plné uzavorkování výrazů, které Vám napovídá pořadí kroků.)

Jaké dílčí kroky tedy provedeme:

1. krok – uvědomíme si vstupy, tj. možnosti pravdivostních hodnot jednoduchých výroků, které jsou ve složeném výroku obsaženy (p,q)

2. krok – určíme pravdivostní hodnotu složeného výroku ($\neg p$)

3. krok – určíme pravdivostní hodnotu složeného výroku ($\neg q$)

4. krok – určíme pravdivostní hodnotu složeného výroku ($\neg p$) \wedge q

5. krok – určíme pravdivostní hodnotu složeného výroku ($\neg q$) \vee p

6. krok – určíme pravdivostní hodnotu složeného výroku $q \Rightarrow ((\neg q) \vee p)$

7. krok – určíme pravdivostní hodnotu složeného výroku $((\neg p) \wedge q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow ((\neg q) \vee p))$

Sloupec A (vstup)	Sloupec B (vstup)	Sloupec C (2. krok)	Sloupec D (3. krok)	Sloupec E (4. krok)
jednoduché výroky		Negace (sloupec A)	Negace (sloupec B)	Konjunkce (sloupce C,B)
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge q$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	0

Sloupec F (5. krok)	Sloupec G (6. krok)	Sloupec H (7. krok) = výstup
Disjunkce (sloupce D,A)	Implikace sloupce (B,F)	Ekvivalence sloupce(E,G)
$(\neg q) \vee p$	$q \Rightarrow ((\neg q) \vee p)$	$((\neg p) \wedge q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow ((\neg q) \vee p))$
1	1	0
1	1	0
0	0	0
1	1	0

Aniž bychom znali obsah sdělení, tj. o čem složený výrok vypovídá, rozбором pravdivostních hodnot jsme zjistili, že se v tomto případě jedná o výrok kontradiktorický (vždy nepravdivý nezávisle na pravdivostních hodnotách jednoduchých výroků p,q). Tzn. Původní výroky V1 a V2 nejsou vzájemně zaměnitelné.

Speciální případy složených výroků:

Pravdivostní hodnota složeného výroku není závislá na pravdivostních hodnotách jeho částí (ale jen na logické formě)

TAUTOLOGICKÝ VÝROK (tautologie) – vždy pravdivý složený výrok

Příklad:

Paroubek bude premiérem nebo nebude premiérem. ($p \vee \neg p$)

Jan a Dan jsou studenty střední školy právě tehdy, když není pravda, že Jan není studentem střední školy nebo Dan není studentem střední školy. ($(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg((\neg p) \vee (\neg q))$)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$\neg((\neg p) \vee (\neg q))$	$((p \wedge q) \Leftrightarrow \neg((\neg p) \vee (\neg q)))$
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1

KONTRADIKTORICKÝ VÝROK (kontradikce) – vždy nepravdivý složený výrok

Příklad:

Paní učitelka je i není hodná. ($p \wedge \neg p$)

Aplikace teorie do praxe

Příklad: Proved'te rozbor pravdivostních hodnot složeného výroku této logické formy
 $((p \Leftrightarrow q) \wedge q) \Rightarrow (\neg p)$

Řešení: tabulka pravdivostních hodnot

p	$\neg p$	q	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q) \wedge q$	$((p \Leftrightarrow q) \wedge q) \Rightarrow (\neg p)$
1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1

Určete, zda tento výrok je tautologický. (Svou odpověď odůvodněte)

Výrok není dle rozboru pravdivostních hodnot tautologický, protože nabývá i pravdivostní hodnoty „0“.

Příklad:

Rozhodněte, prosím, zda výroky V1 a V2 jsou vzájemně zaměnitelné (tj. zda nabývají stejných pravdivostních hodnot). Výrok V1 je vyjádřený formulí $p \Leftrightarrow q$ a výrok V2 je vyjádřený formulí $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Svou odpověď odůvodněte.




Řešení:

		V1			V2
p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Výroky V1 a V2 jsou vzájemně zaměnitelné. Nabývají stejných pravdivostních hodnot.

Pokud spojíme tyto výroky ekvivalencí, tj. $V1 \Leftrightarrow V2$ vyjádřeno formulí $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$, jedná se o tautologii.

Kontrolní otázky a cvičení

-  Co je to tautologický výrok. Uveďte příklady.
-  Co je to kontradiktorický výrok. Uveďte příklady.
-  Vytvořte tabulku pravdivostních hodnot pro nějaký složený výrok.